

# Chapitre 1

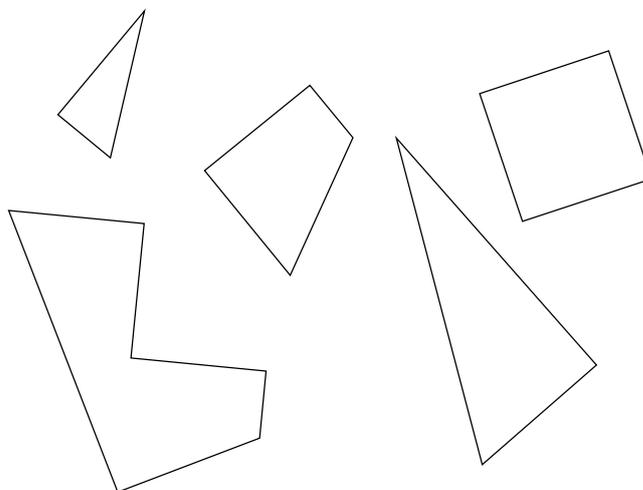
## Puzzle juxtaposé - Publication provisoire

### 1 Assemblage du puzzle

*Comment s'y prendre ?*

Chaque élève reçoit la consigne ci-dessous et une enveloppe avec les pièces du puzzle. L'activité se fait de manière individuelle.

 En utilisant les cinq pièces du puzzle, construis un carré.



*Fig. 1*

L'élève doit assembler les pièces pour obtenir un carré.

L'enseignant laisse à l'élève le temps de manipuler pour trouver une solution. Si celui-ci reste trop longtemps bloqué, des pistes pour le guider sont décrites par la suite.

Ensuite, l'élève colle son puzzle sur la fiche de la page ?? où le contour du carré final a été dessiné, ceci afin de garder une trace de l'activité.

Plusieurs assemblages sont possibles pour reconstituer un carré, ils sont présentés à la section ??. L'activité de la section ?? a été imaginée pour

amener les élèves à prendre conscience des différents puzzles possibles et des transformations du plan qui lient certains entre eux.

### 1.1 Solutions

Pour reconstituer le *carré final*, il existe deux familles de solutions non équivalentes illustrées ci-dessous.

#### Famille I

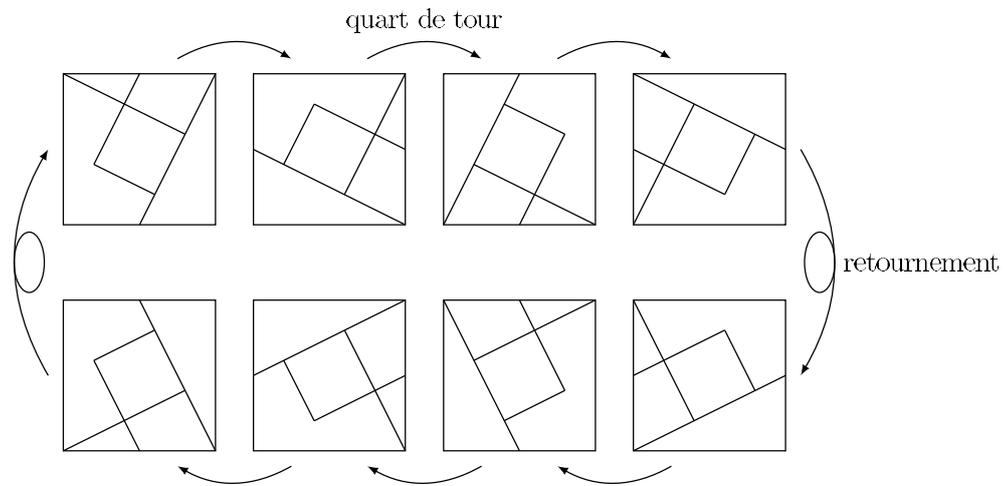


Fig. 2

#### Famille II

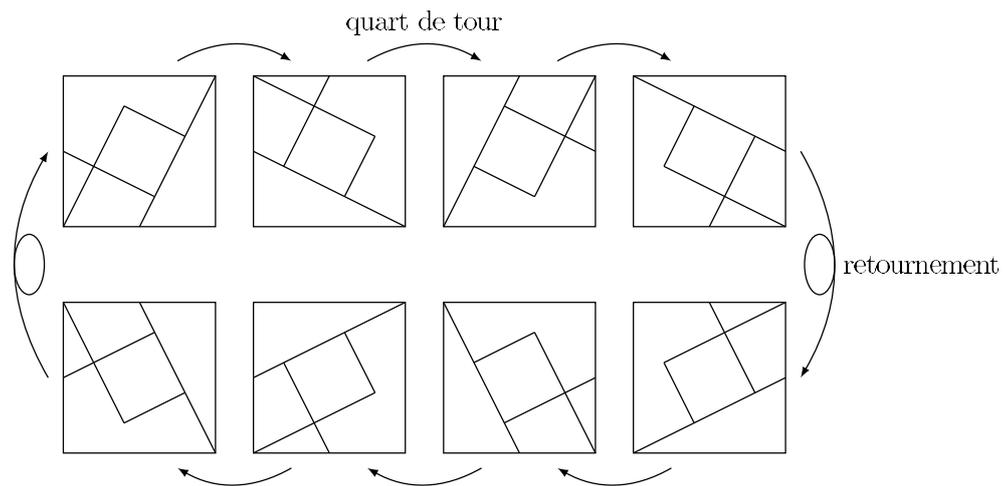


Fig. 3

Au sein de chacune des familles, les assemblages sont tous équivalents à une isométrie près, comme illustré par les figures ?? et ??. Ce n'est pas le cas entre les deux familles : il n'existe aucune isométrie qui applique une solution de la famille I sur une solution de la famille II. Il est

facile de s'en apercevoir avec la manipulation des transparents sur lesquels sont imprimées les solutions (voir annexe page ?? utilisée à la section ??), car il est impossible de faire coïncider les deux solutions par superposition en les tournant ou en les retournant.

En reprenant la première position de chaque famille (famille I à la figure ?? et famille II à la figure ??), nous illustrons ci-contre pourquoi elles ne sont pas images l'une de l'autre par une isométrie. Nous observons que les polygones colorés subissent chacun un déplacement différent tandis que les blancs restent à leur place.

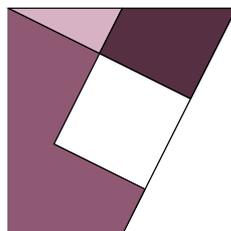


Fig. 4

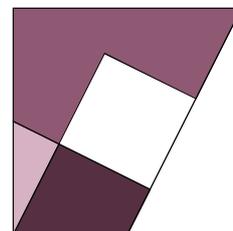


Fig. 5

Pour obtenir les pièces du puzzle, l'enseignant doit imprimer les fiches ?? à ???. Les figures sont tracées que sur une des faces. bla bla bla

Pour chaque famille, les assemblages de la deuxième ligne des figures ?? et ?? sont obtenus avec la majorité des pièces dont les bords sont dessinés en noir. En général, les élèves utiliseront les faces sur lesquelles sont imprimés les segments. Les assemblages de la deuxième ligne sont donc moins susceptibles d'être reproduits par les élèves.

## 1.2 Stratégies

Pour réaliser le puzzle, l'élève devra combiner plusieurs stratégies. Certaines sont décrites ci-dessous.

### Assemblage facile

Une stratégie part de l'assemblage des deux pièces illustrées à la figure ??. L'élève manipule ensuite le *quadrilatère* obtenu par l'assemblage comme une pièce à part entière illustrée à la figure ??.

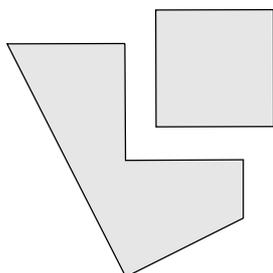


Fig. 6

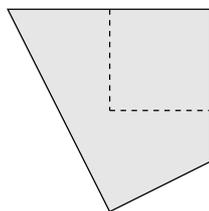


Fig. 7

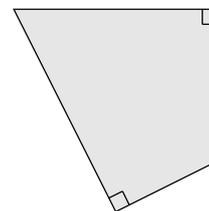


Fig. 8

Le *quadrilatère* de la figure ?? possède deux angles droits, l'un du *petit carré* et l'autre de l'*hexagone*. Le choix de l'angle droit qui constituera un des angles du *carré final* va être déterminant. En effet, soit l'élève décide d'utiliser l'angle en haut à droite comme celui du *carré final* à obtenir, soit il utilise l'angle droit du bas. Dans le premier cas, l'élève place le *quadrilatère* comme illustré à la figure ?? et se dirige vers l'assemblage d'un *rectangle*. Dans le deuxième cas,

l'élève place le *quadrilatère* comme sur la figure ?? et il est sur la bonne voie pour obtenir un carré. Si l'élève reste bloqué sur l'assemblage du *rectangle*, l'enseignant peut le guider vers le deuxième placement des pièces en le questionnant sur le choix de l'angle droit pour le *carré final*.

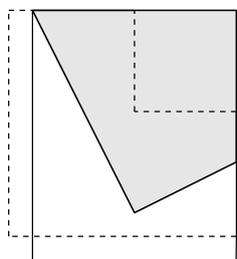


Fig. 9

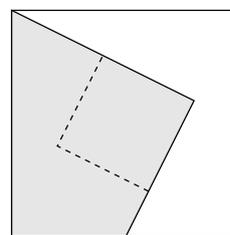


Fig. 10

### Longueurs des côtés et amplitudes des angles

Toutes les stratégies pour assembler les pièces s'appuient sur les longueurs des côtés et les amplitudes des angles. Le cas de l'*assemblage facile* ci-dessus en est un exemple : l'élève emboîte des pièces en associant un angle rentrant et un angle sortant de même amplitude et en faisant correspondre des côtés de même longueur.

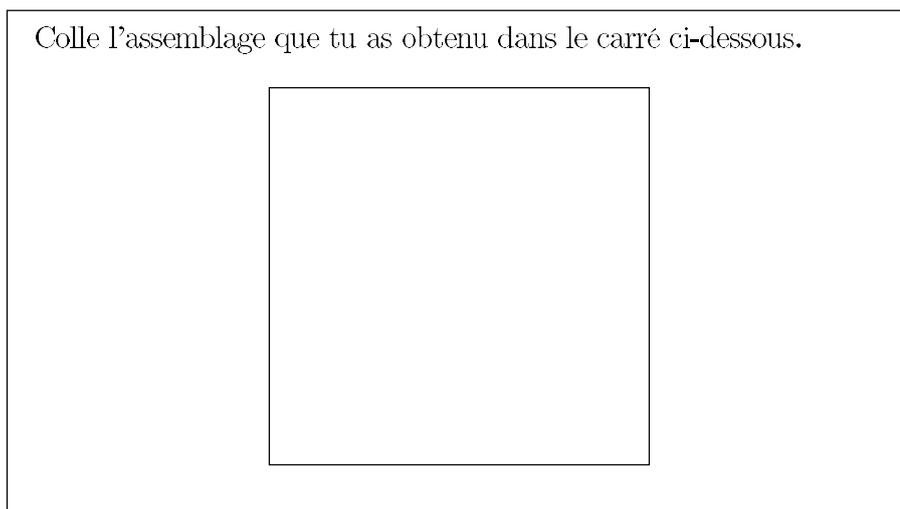
L'élève pourrait également comparer la forme des espaces à combler dans le puzzle avec la forme des pièces qui lui restent, ce qui revient à associer les angles et les longueurs qui se correspondent.

Sachant que c'est un carré qu'on veut reconstruire, se focaliser sur les angles droits et les longueurs égales pour les côtés du *carré final* semble une bonne stratégie. Cependant, toutes les pièces disposent d'au moins un angle droit. De plus, certains des côtés du *carré final* ou de ses angles sont obtenus par l'assemblage de côtés et d'angles des pièces initiales. Sans le formuler ou réaliser consciemment ce qu'il fait, l'élève assemble des angles complémentaires ou supplémentaires.

### 1.3 Trace de l'activité

*Comment s'y prendre ?*

Dès que l'élève a pu construire un carré, il reçoit la consigne ci-dessous (fiche ??) avec le contour du *carré final* dessiné.



Cette étape lui permet de s'assurer que la figure qu'il a obtenue est bien un carré et il garde de cette manière la trace de son puzzle.

Cette fiche peut devenir une piste pour l'élève qui serait bloqué dans sa réflexion car elle lui fournit la longueur du côté du *carré final*.

#### 1.4 Classification des assemblages

*Comment s'y prendre ?*

L'activité consiste à classer tous les assemblages que les élèves ont obtenus pour ensuite identifier les isométries qui les lient le cas échéant.

Dès qu'un élève a reconstitué un carré et l'a collé, il reçoit la consigne suivante et les deux solutions d'assemblage imprimées sur du papier transparent (fiche ??).

Cherche le transparent que tu peux superposer correctement à ton puzzle. Quand tu as trouvé, note sur ta feuille le numéro qui est inscrit sur le transparent et note ton prénom.

La manipulation des transparents permet de visualiser toutes les positions possibles. Pour identifier la sienne, l'élève doit tourner et retourner les transparents et en faire coïncider un avec son puzzle. Comme décrit à la section ??, seul un des deux transparents convient pour chaque assemblage produit.

Pendant ce temps-là, l'enseignant prépare deux endroits différents dans la classe où les élèves viendront afficher leur puzzle et il indique les numéros des familles de solutions comme titre. Le tableau peut être séparé en deux s'il est assez grand. Ensuite, il place dans la partie de la famille I le puzzle de la fiche ?? et dans la partie II le puzzle de la fiche ???. Ces assemblages sont les moins susceptibles d'être produits par les élèves (voir section ?? page ??).

Quand l'élève a terminé, il reçoit les consignes suivantes.

Dirige toi vers l'espace qui a le même numéro que celui que tu as trouvé pour ton puzzle.  
Compare ton puzzle à ceux déjà affichés.  
Si tu trouves un puzzle identique au tien, place ton puzzle en dessous.  
Si aucun puzzle n'est identique au tien, place ton puzzle à côté.

Lorsque l'élève a identifié le transparent qui correspond à son puzzle et inscrit son prénom sur sa feuille, il peut se diriger vers la partie du tableau qui porte le même chiffre que le transparent utilisé. Il compare son puzzle à ceux déjà au tableau. S'il en trouve un identique au sien alors, il place sa feuille en dessous sinon, il la place à côté et crée donc une nouvelle colonne.

Quand tous les puzzles sont affichés, l'enseignant et les élèves font une analyse collective. L'enseignant explique qu'il y a deux familles de solutions, I et II, qui correspondent chacune à un des deux transparents. Il demande ensuite, à l'ensemble de la classe, pourquoi il y a plusieurs colonnes pour une même famille. Le travail à effectuer pour répondre à cette question est d'analyser comment passer, au sein d'une famille, d'une colonne à une autre. Plus exactement, il s'agit d'identifier les isométries qui lient les colonnes entre elles : une rotation ou une symétrie orthogonale.

Les positions identiques à une rotation près sont plus faciles à identifier. De plus, l'élève peut directement vérifier ce qu'il imaginait, en tournant la feuille. Pour identifier une symétrie orthogonale, le travail mental est plus complexe et l'usage du transparent est nécessaire pour la vérification.

Pour vérifier la compréhension des élèves, l'enseignant les invite à déplacer leur puzzle dans une autre colonne imposée et à bouger correctement leur feuille pour faire correspondre leur puzzle à ceux de la nouvelle colonne. Il amènera à un moment choisi, un changement de colonne qui nécessitera de retourner la feuille pour y arriver. L'enseignant acceptera comme réponse de l'élève l'impossibilité de le faire. L'usage du transparent permet de faire visualiser l'isométrie qui lie les colonnes entre elles. Une autre solution serait de demander à l'élève de calquer son puzzle sur le verso de sa feuille pour obtenir son puzzle retourné. La comparaison se fera plus aisément même si une rotation sera peut-être encore à effectuer.

La conclusion de l'analyse sera : si on applique le(s) bon(s) mouvement(s) aux puzzles d'une même famille de solutions, on pourrait tous les rassembler dans une seule colonne. Pour cela, il faut se permettre de tourner ou retourner les feuilles.

Cette activité doit être menée en prenant en compte les réactions et les propositions des élèves. Des outils supplémentaires seront nécessaires pour certains élèves. Par exemple, la mise en couleurs des pièces aidera l'élève à comparer deux puzzles en analysant pièce par pièce.

*Échos des classes*

En allant placer son puzzle au tableau, l'élève pourrait repérer qu'en tournant sa feuille il peut obtenir une solution qui est déjà affichée. Il pourrait très bien placer sa feuille horizontalement pour la faire correspondre aux puzzles de la colonne choisie. L'enseignant laisse l'élève agir. L'analyse collective sera plus facile car les élèves qui passeront ensuite, suivront peut-être l'exemple en se demandant quel mouvement appliquer à leur feuille. L'enseignant peut repartir de ce travail pour lancer la discussion qui confirmera ce que ces élèves ont déjà compris.

## 2 Réalisation des pièces du puzzle

L'objectif de l'activité est de créer les différentes pièces du puzzle sur le logiciel *Apprenti Géomètre mobile*.

### 2.1 Logiciel AG

Avant de se lancer dans cette activité, les élèves doivent être familiers des fonctionnalités du logiciel *Apprenti Géomètre mobile*. Une activité d'initiation a été créée à cet effet. [référence]

Pour la réalisation des pièces, il est nécessaire de maîtriser les mouvements et les opérations *Diviser* (Fig. ?? à Fig. ??), *Découper* (Fig. ?? à Fig. ??) et *Fusionner* (Fig. ?? à Fig. ??). Certains élèves pourraient utiliser l'opération *Copier* (Fig. ?? à Fig. ??).



Fig. 11



Fig. 12



Fig. 13

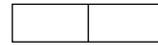


Fig. 14

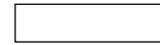


Fig. 15

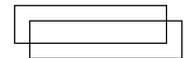


Fig. 16

### 2.2 Consignes

*Comment s'y prendre ?*

L'élève garde à côté de lui le collage du puzzle qu'il a réalisé. L'enseignant lui fournit une nouvelle série de pièces pour lui permettre de continuer à les manipuler. L'accès au logiciel *Apprenti Géomètre mobile* se fait selon les habitudes de la classe.

Lorsque chaque élève dispose du matériel nécessaire, il reçoit les consignes suivantes.

- ❖ Ouvrez le logiciel *Apprenti Géomètre mobile* et sélectionnez l'interface *Grandeurs*. Faites apparaître un carré à l'écran. Effectuez les opérations nécessaires pour obtenir les pièces du puzzle qui constituent ce carré.

À partir d'un carré à l'écran, l'élève doit utiliser les opérations disponibles sur le logiciel pour obtenir les pièces initiales du puzzle.

L'élève travaille individuellement en analysant le matériel papier à sa disposition. Cela l'amènera aux constatations décrites à la section ??, qu'il pourra combiner afin de mener à bien l'activité.

Lorsque l'élève a recréé les pièces, il peut passer à la consigne de la section ?? qui lui permettra de vérifier si les pièces obtenues sont correctes.

### 2.3 Constatations

Les fonctionnalités disponibles sur le logiciel *Apprenti Géomètre mobile* vont, dans cette activité, forcer l'élève à porter son regard sur les côtés des pièces vu qu'il va devoir agir sur des segments pour obtenir des figures. Il va alors chercher à comparer les côtés des pièces en manipulant le matériel papier.

Les pièces présentent des côtés isométriques. Certains ont été découverts lors de l'assemblage pour y parvenir. Pour vérifier que deux longueurs sont égales, l'élève peut chercher à les faire coïncider en plaçant les pièces côte à côte ou en les superposant (que ce soit deux pièces indépendantes ou une pièce indépendante à déplacer sur l'assemblage collé).

Il existe cinq longueurs différentes de côté dont celle de l'hypoténuse du *grand triangle*. Les autres sont mises en évidence dans les dessins suivants.

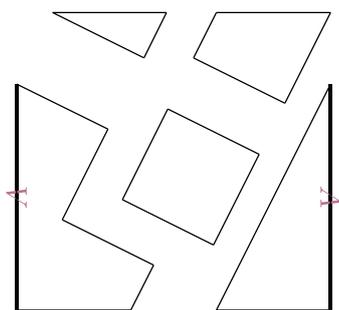


Fig. 17

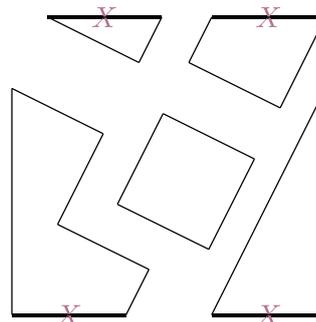


Fig. 18

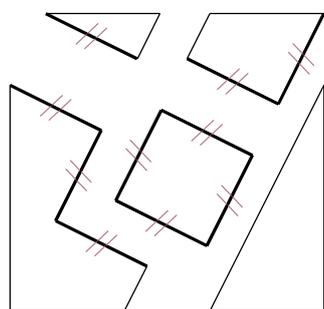


Fig. 19

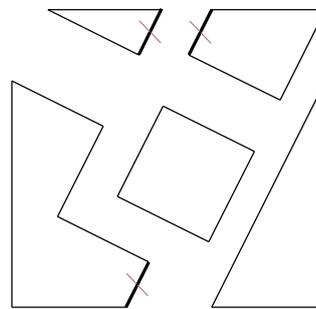


Fig. 20

Si des côtés ont des longueurs différentes, ces dernières sont peut être rapport l'une de l'autre. Une stratégie pour trouver un rapport consisterait à déplacer une pièce et à compter le nombre de fois que son côté peut être reporté sur l'autre côté.

Tous les côtés des pièces peuvent être construits à partir de deux longueurs différentes (figures ?? et ??) : la *grande longueur* et la *petite longueur*.

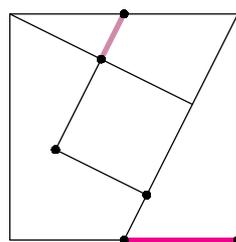


Fig. 21

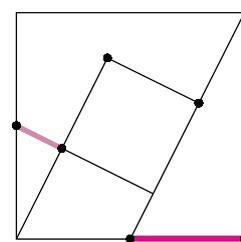


Fig. 22

L'assemblage fait apparaître des segments qui ne sont pas des côtés de pièces mais la somme de certains d'entre eux comme illustré ci-dessous. Ils apparaîtront lors de la reproduction des pièces sur le logiciel.

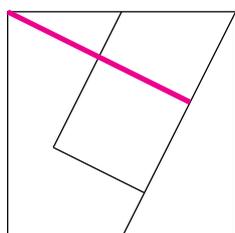


Fig. 23

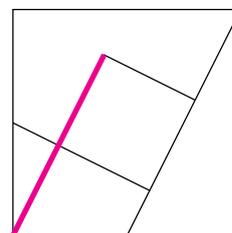


Fig. 24

Quand l'élève tombe sur un de ces segments, il va le comparer aux côtés des pièces. La stratégie de manipulation précédente pour trouver un rapport reste pertinente mais s'exécutera uniquement avec le déplacement d'une pièce sur le collage de l'assemblage. Certains rapports sont déductibles directement des longueurs égales illustrées aux figures ?? à ??. En effet, le côté d'une pièce est reporté deux fois sur un segment composé de lui-même et d'un autre côté de même longueur. Certains élèves conjecturent tous les rapports à vue d'œil.

Ci-dessous, nous illustrons pour chacune des deux longueurs (figures ?? et ??), les rapports qu'il existe entre elles et les côtés des pièces ou les segments du dessin. Ce que nous appelons un « rapport 2 » signifie que la longueur se reporte deux fois sur le segment ou les segments, il correspond au coefficient à utiliser sur le logiciel *Apprenti Géomètre mobile* pour effectuer une division.

### Grande longueur

La *grande longueur* correspond à la moitié de la longueur du côté du carré final.

Rapport 2 :  
la *grande longueur*  
se reporte donc  
deux fois sur les  
côtés du *carré*  
*final*.

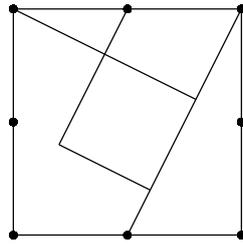


Fig. 25

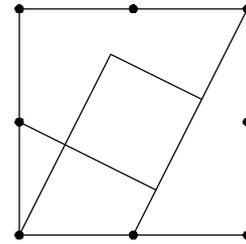


Fig. 26

**Petite longueur**

La *petite longueur* correspond à celle du plus petit côté du *petit triangle*.

Rapport 2

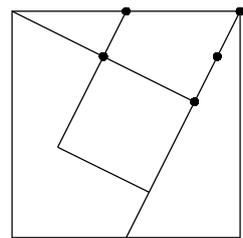


Fig. 27

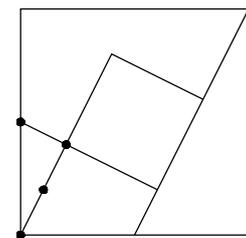


Fig. 28

Rapport 3

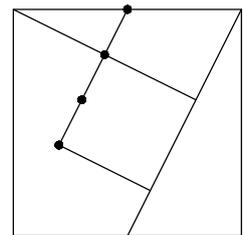


Fig. 29

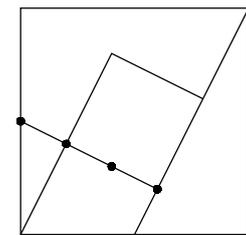


Fig. 30

Rapport 4

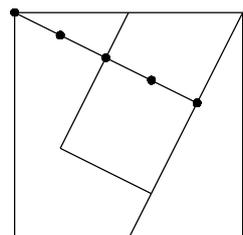


Fig. 31

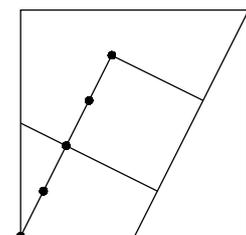


Fig. 32

Rapport 5

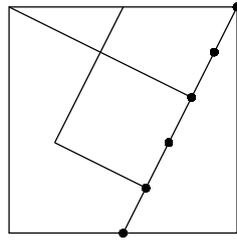


Fig. 33

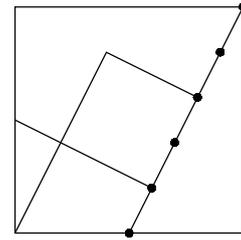


Fig. 34

## 2.4 Stratégies

L'élève va devoir ordonner ou combiner ses constatations afin de développer des stratégies de construction.

La réalisation des pièces du puzzle grâce au logiciel *Apprenti Géomètre mobile* implique la découpe de plus de pièces que nécessaire et donc ensuite, la fusion de certaines. L'élève doit alors visualiser des tracés non dessinés sur les pièces du puzzle.

Plusieurs façons de reproduire les pièces sont possibles. Elles diffèrent par les constatations utilisées ou par l'ordre. Nous en illustrons une à titre d'exemple.

Pour obtenir le *grand triangle* (Fig. ??) à partir du carré (Fig. ??), il faut faire apparaître les points de la découpe. La seule façon d'y arriver est de diviser en deux un côté du carré (Fig. ??).

### Le grand triangle

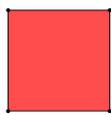


Fig. 35

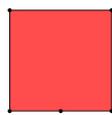


Fig. 36

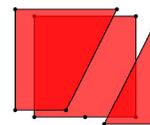


Fig. 37



Fig. 38

### Le petit triangle et le trapèze

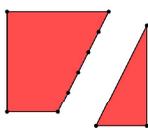


Fig. 39

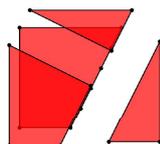


Fig. 40



Fig. 41



Fig. 42

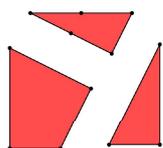


Fig. 43

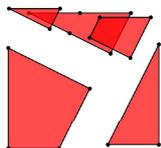


Fig. 44

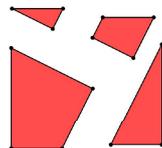


Fig. 45

### Le petit carré

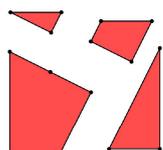


Fig. 46



Fig. 47



Fig. 48



Fig. 49

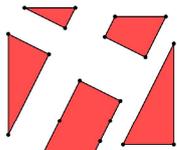


Fig. 50

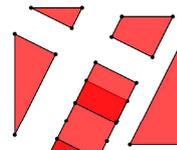


Fig. 51

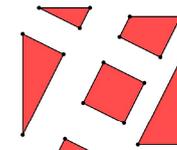


Fig. 52

### L'hexagone

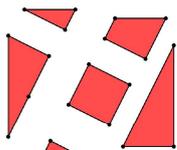


Fig. 53

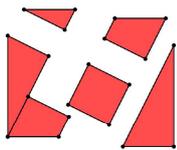


Fig. 54

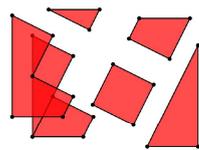


Fig. 55

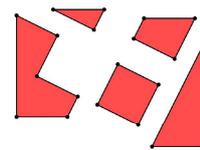


Fig. 56

Une difficulté apparaît lorsqu'on souhaite fusionner deux figures par un côté qui n'a pas la même longueur dans les deux figures (Fig. ?? à Fig. ?? ci-dessus). Dans ce cas, il faut, au préalable, créer un segment supplémentaire sur le côté commun (Fig. ??) pour que la fusion puisse se faire (Fig. ??).

Dans cette réalisation, on a utilisé les rapports suivants :

- Figure ?? et ?? : rapport 2 de la grande longueur.
- Figure ?? : rapport 5 de la petite longueur.
- Figure ?? et ?? : rapport 2 de la longueur moyenne.

À la figure ??, l'élève doit diviser un segment obtenu sur le logiciel mais qui n'est pas un côté

d'une pièce du puzzle de départ. Le segment est à diviser en deux, la longueur moyenne  $y$  est reportée deux fois.

Si l'élève repère des régularités, il pourrait décider de dupliquer quelques pièces qu'il a déjà obtenues pour en reconstituer d'autres. Cette stratégie amène l'utilisation d'un outil supplémentaire du logiciel : *Copier*.

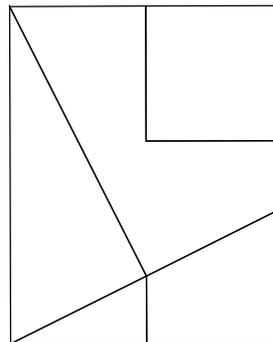
## 2.5 Vérification et trace de l'activité

*Comment s'y prendre ?*

Pour permettre à l'élève de vérifier la réalisation de ses pièces, l'enseignant l'amène à réaliser un nouvel assemblage qui n'est possible que s'il a correctement découpé le carré à l'activité précédente.

L'élève reçoit pour cela la consigne suivante.

❖ Avec les pièces de puzzle que tu as réalisées sur le logiciel *Apprenti Géomètre mobile*, reproduis le *rectangle* suivant. Ce nouvel assemblage n'est possible que si tu as découpé correctement tes pièces.



Si l'élève n'a pas utilisé les bons rapports pour les divisions des segments, il ne pourra pas, par exemple, placer des angles droits pour les angles du *rectangle*.

Pour terminer l'activité et garder une trace de son travail, l'élève enregistre son fichier avant de fermer le logiciel en veillant à sélectionner l'enregistrement de l'historique.